ÚVAHA O HRANICÍCH FANTAZIE

Je matematika jen užitečná a správně utvořená fantazie? Jsou čísla skutečné entity nebo jde to jen o lidský výmysl? Než se vůbec můžeme pustit do takovéto úvahy, nejprve si musíme definovat základní pojmy, které budeme používat, protože jinak by si je každý mohl vyložit po svém a tato úvaha by nemusela působit logicky. Zde je tedy náš slovník pojmů s definicemi. Pojmy mi přišlo vhodné předefinovat proto, že jejich definice nebyla vždy dost exaktní. Navíc několik pojmů jsem pro účely této úvahy musel vytvořit, a proto je nezbytná jejich definice.

Realita: Vzájemná interakce částic v našem prostoru.

Dostupná realita: Určitá subjektivní výseč reality, kterou může živá bytost vnímat pomocí svých smyslových orgánů nebo zprostředkovaně pomocí různých externích zařízení, které nevnímatelnou realitu „překládají“ do vnímatelné reality.

Vnímatelná realita: Určitá subjektivní výseč reality, kterou může živá bytost vnímat pouze pomocí svých smyslových orgánů.

Psychický jev: Aktivace neuronů v mozku, které reagují na nějaký vjem z reality.

Paměť: Schopnost uložit si určité vjemy k pozdějšímu zpracování.

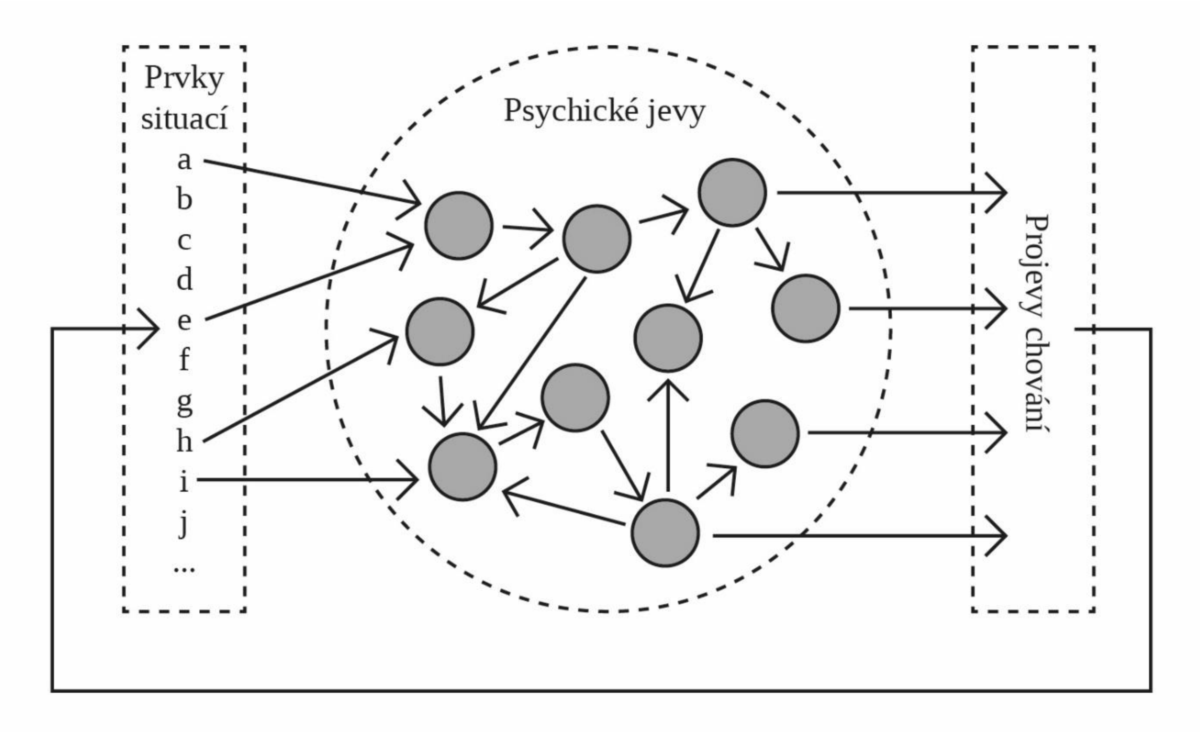
Představivost: Schopnost vybavení si nějakých dříve prožitých vjemů z paměti. Představivost je vědomá, předvědomá i nevědomá zároveň.

Fantazie: Schopnost spojovat více představ do celku a simulovat tak různé variace reality. Vychází pouze a jen z naší reality. Fantazie je vědomá, předvědomá i nevědomá zároveň.

Říká se, že fantazie nezná mezí, ovšem toto tvrzení je nesmyslné. Ve skutečnosti fantazie může obsahovat pouze různé variace různých částí **vnímatelné reality**. Můžeme si tak například představit jednorožce jen proto, že jsme si z **paměti** díky procesu **představivosti** vybavili, jak zhruba vypadá kůň a roh. Potom jsme tyto objekty spojili díky **fantazii** a vytvořili tak jednorožce, který není součástí naší **reality**, ovšem vychází z ní. **Fantazie** nám dokonce umožňuje si představit jiné fyzikální zákony (např. jak by vypadal svět, pokud by po rozpadu atomu vzniklo viditelné světlo namísto gama záření) nebo absenci fyzikálních zákonů (např. svět bez gravitonů). Je ovšem nemožné **představit** si věci, které jsou našim smyslovým orgánům nedostupné. Nemůžeme si **představit**, jak vypadá třeba infračervená barva, a to i přes to, že máme k dispozici infračervenou kameru. Tato kamera nám sice „přeloží“ infračervené spektrum do našeho viditelného spektra, a tímto způsobem můžeme infračervenou barvu vnímat, ovšem velmi ochuzeně. Jinak řečeno – infračervená kamera nám převede určitý vjem z **dostupné reality** do **vnímatelné reality**, ale onu **dostupnou realitu** nebudeme moci vnímat přímo, vždy budeme vnímat jen jakousi její interpretaci. Vnímáme tedy jen její „překlad“. Je to asi jako přeložit nějakou slovní hříčku z jednoho jazyka do druhého – překlad je možný, ovšem slabý a nepřesný. Hranice naší **fantazie** jsou tedy dány našimi smyslovými orgány.

Je důležité si uvědomit, že pojem **vnímatelná realita** je subjektivní, protože třeba pro slepce je tato výseč reality mnohem menší. Pro buňku (nejspíš) nepatrný a pro kámen nulový. Také detailnost a živost **fantazie** záleží na schopnostech fantazírujícího a kvalitě uložení vjemů do **paměti**. **Fantazie** by měly být schopny všechny živé bytosti, které ukládají prožité vjemy do

paměti. Na nižší úrovni se dá **fantazie** (a další **psychické jevy**) chápat jako aktivace určitých skupin neuronů v našem mozku, které si mezi sebou předávají signály, a protože neurony jsou součástí **reality**, vyplývá z toho, že **fantazie** je také součástí **reality**. To ale neznamená, že její vnitřní význam musí být nutně pravdivý (**fantazie** o jednorožci je součástí **reality**, jednorožec však nikoliv). Je to jako science-fiction knihy – jsou součástí **reality**, ovšem jejich vnitřní význam je nepravdivý. Patří ale naše **psychické jevy** do **vnímatelné reality**? Pro nás částečně ano, ale pro ostatní živé bytosti ne. My jsme totiž schopni vnímat své vlastní vědomé **psychické jevy**. Někdy jsme dokonce schopni odhalit i své nevědomé **psychické jevy**. Nabízí se tedy další otázka: Patří naše **psychické jevy** do **dostupné reality**? To rozhodně ano! V dnešní době jsme schopni je detekovat pomocí funkční magnetické rezonance (fMRI) a neurálních sítí, i když prozatím nedokonale. To je ale v rozporu s definicí reality podle Wikipedie, která zní: „*Skutečnost nebo též realita je vše co (skutečně) existuje na rozdíl od pouhých domněnek, představ, iluzí, plánů, přání, možností atd.*“. **Realita** a **psychické jevy** na sebe vzájemně působí. Události působí na naše **psychické jevy** a ty zase na **realitu**. Tuto myšlenku velmi dobře ilustruje nákres kognitivně-afektivního modelu osobnosti Mischela a Shody (viz *obr. 1)*



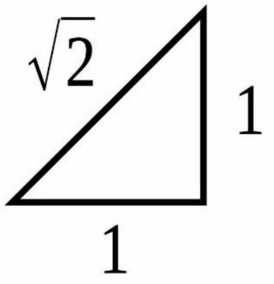
obr. 1

Co je ale potom matematika? Je to jen **fantazie** s rigorózními pravidly? Nejspíše ano. Matematika je pravděpodobně jen velice přesná a užitečná **fantazie** s přesnými a obecně dodržovanými pravidly. To ale ovšem znamená, že by neměla obsahovat věci, které si nelze **představit**, tedy věci, které nevycházejí z **reality**. Matematika ale obsahuje symboly, jejichž význam si nelze **představit**. Dobrým příkladem je symbol pro nekonečno. Přesto, že chápeme koncept nekonečna, nedokážeme si ho představit. Pozoruhodné je, že s ním i přesto dokážeme nějakým způsobem intuitivně zacházet. Proto třeba víme, že sumace všech přirozených čísel je rovna nekonečnu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots = \infty$$

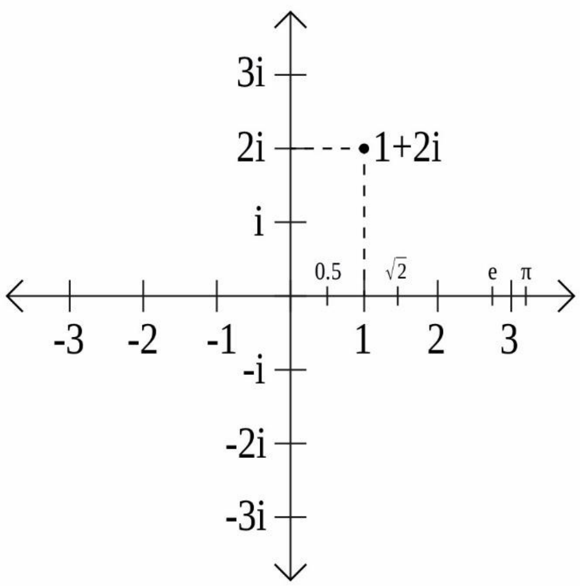
Tento příklad jsme dokázali vypočítat bez nutnosti sčítání jednotlivých čísel až do nekonečna! Samozřejmě, že tato zvláštnost nekonečna není jen v matematice. Už jen to, že právě teď používáme a chápeme slovo nekonečno je podivné. Toto podstatné jméno se objevuje skoro ve všech jazycích spolu s dalšími podstatnými jmény, jež není možné si věrně **představit**, jako je třeba slovo nicota. Jediný způsob, jak si správně **představit** nicotu je **nepředstavovat** si ji vůbec.

Také si nejspíš nedokážeme **představit** přesnou hodnotu čísla $\sqrt{2}$, protože toto číslo má nekonečný a neperiodický desetinný rozvoj. Přesto si ho ale dokážeme **představit** jako délku přepony trojúhelníku (viz *obr. 2*). Podobně je to i s jinými čísly jako jsou třeba π, *φ*, *e* nebo log(2). Tato čísla se alespoň blíží k nějaké nám známé hodnotě, i když jsou „nekonečně přesná“. Víme proto, že třeba π je přibližně 3.14 a to nám pro hrubou **představu** stačí. Je to jako **představit** si nějakou konkrétní konvici s čajem – neznáme přesnou polohu všech atomů (nebo dokonce elektronů a kvarků), které ji tvoří. Neznáme dokonce ani její přesnou teplotu vyjádřenou v kelvinech. Hrubá **představa** o ní nám však bohatě stačí. Na ještě větší problém narazíme při pokusu o **představu** záporných čísel. Pro vysvětlení tohoto problému se většinou používá metafora nějakého dluhu, přesto ovšem záporná čísla v reálném světě nevyjadřují kvantitu ničeho. Není divu, že když se v historii poprvé zaváděli záporná a iracionální čísla, většina lidí je nebrala vážně a považovali je jen za matematický trik.



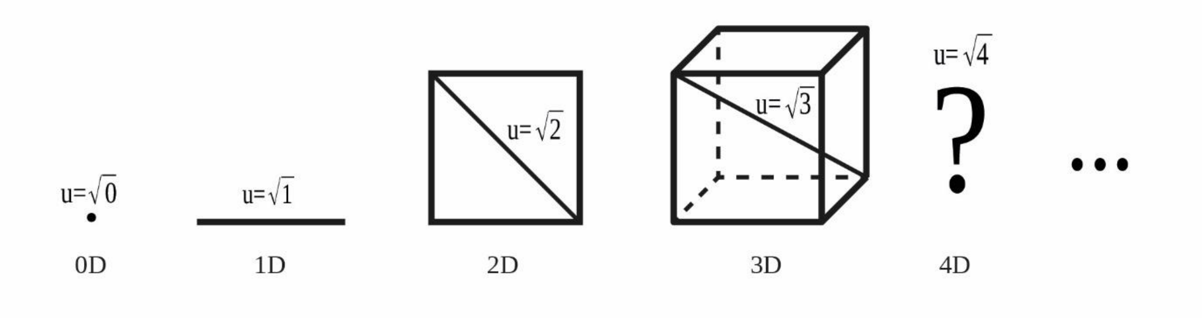
obr. 2

Nemožné je **představit** si číslo $\sqrt{-1}$. Toto číslo totiž nemá žádnou představitelnou hodnotu. Nevyjadřuje kvantitu ničeho. Tomuto číslu říkáme imaginární číslo a značíme ho písmenem *i*. Číslo *i* totiž není větší, menší či rovno jakémukoliv reálnému číslu, je rovno pouze samo sobě. A jako kdyby toho nebylo dost, těchto čísel je nespočetně mnoho (stejně jako reálných čísel). Máme tedy např. 2*i*, 3*i*, 4*i*, 123*i*, 0.5*i*, 0.123*i*, -20*i*, πi… Dokonce můžeme mít čísla, která jsou z části reálná a z části imaginární. Takovým číslům říkáme komplexní čísla. Příkladem je číslo 1+2*i*, jehož reálnou část tvoří číslo 1 a imaginární část číslo 2*i* (tedy 2*$\sqrt{-1}$.). Lze je snadno naznačit jako body na rovině komplexních čísel (viz *obr. 4*). Imaginární čísla lze chápat jako další dimenzi čísel, a proto jsou naznačena osou, která je kolmá vůči ose reálných čísel. Komplexní čísla (tedy i imaginární) si nelze **představit** ani přibližně. Neexistuje pro ně žádná metafora, která by převedla jejich koncept do reálného života. Přesto je ale využíváme velmi často – třeba při řešení kvadratických rovnic nebo v kvantové fyzice. Vycházejí tedy tato čísla z naší **reality**, přesto, že nevyjadřují žádnou kvantitu? Nejspíše ano, jelikož je hojně využíváme v praxi. Jak je ale možné, že jsou tato čísla součástí matematiky přesto, že si je nedokážeme **představit**? Nejspíš není nutné **představit** si je. Pro manipulaci s nimi stačí znát jen jejich



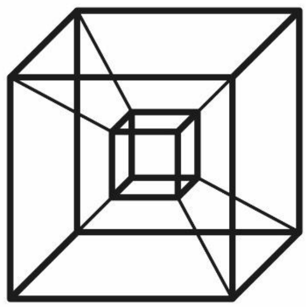
obr. 4

koncept a ostatní matematické pravidla.



obr. 5

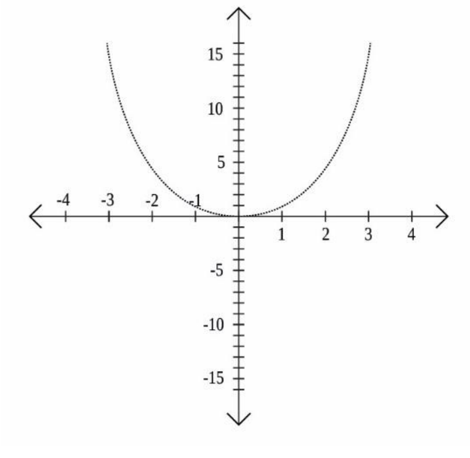
Obdobným problémem je pokus o **představu** geometrických těles, jejichž dimenze je větší než tři. Přesto pro nás není problém vypočítat jejich vlastnosti. Jak lze spatřit na *obrázku 5*, dokážeme zjistit délku tělesové úhlopříčky *u* nadkrychle v jakékoliv dimenzi. K tomuto poznatku jsme došli metodou indukce, a proto ani nebylo potřeba představit si je. Taková představa by stejně nebyla možná. Můžeme ovšem tyto objekty „přeložit“ do nižších dimenzí. Tímto překladem bohužel stejně nezjistíme, jak tyto vícedimenzionální objekty skutečně vypadají. Je to jako výše uvedený příklad s infračervenou barvou. Jeden možný způsob takového „překladu“ je metoda projekce. Projekci lze zjednodušeně vysvětlit tak, že na nějaký objekt posvítíme. Stín, který pak objekt vrhá na plochu pod ním je pak jeho projekcí a je o jednu dimenzi nižší. Na *obrázku 6* můžeme vidět 3D projekci 4D nadkrychle (teseraktu).



obr. 6

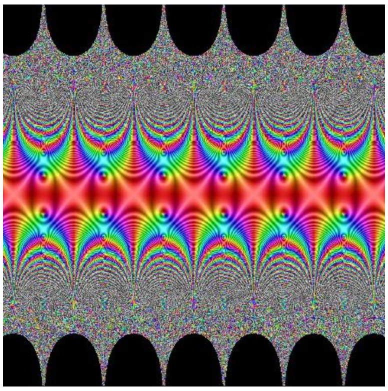
Existuje více metod vizualizace vícedimenzionálních objektů, do jejich popisu se ale pouštět nebudeme – v jádru je jejich princip stejný.

S podobným problémem vyšších dimenzí se setkáme také při pokusu o vizualizaci grafu komplexních funkcí. Není problém vizualizovat graf funkce f pro reálná čísla. Prostě jen vytvoříme osy X a Y, na kterých budou ležet reálná čísla. Osa X bude reprezentovat definiční obor D(*f*) funkce (tedy vstupní hodnoty funkce) a osa Y bude reprezentovat obor hodnot H(*f*) funkce (tedy hodnotu jejího výsledku) Ukázku takového grafu můžeme spatřit na *obrázku 7*. Toto zobrazení je velice užitečné, neboť nám pomáhá lépe pochopit funkce. Jak ale vytvoříme graf funkce pro obor komplexních čísel? Nejprve bychom museli vytvořit osu X pro reálnou část čísla, které jsme vložili do funkce, dále osu Y pro jeho imaginární část. Tím jsme právě vytvořili rovinu komplexních čísel (viz *obr. 4*). Teď už jen zbývá vytvořit osu Z pro reálnou část výsledku funkce a osu W pro jeho imaginární část. A právě v tento moment nastává onen problém – najednou máme celkem čtyři osy. Graf této funkce je tedy čtyřdimenzionální, a proto potřebujeme nějaký vhodný překlad do dimenzí nižších. Pro takový překlad existuje několik metod. Jednou z nich je domain coloring. Tato metoda zachová osy X a Y, tedy reálnou a imaginární část vstupní hodnoty funkce, ovšem výsledek funkce převede do polárních souřadnic. Barva (neboli HUE) každého bodu této roviny komplexních čísel je dána tím, v jakém úhlu leží výsledek od osy reálných čísel (osy X) a světlost je dána podle toho, jak daleko leží výsledek od průsečíku

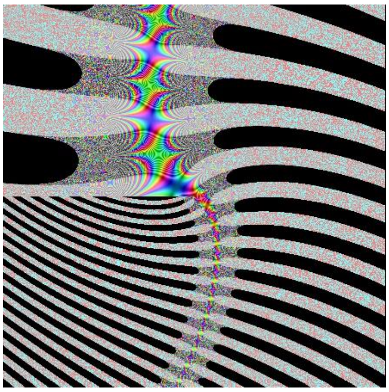


obr. 7 – f(x) = x^2

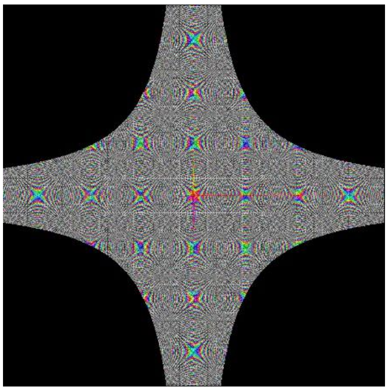
os (tedy od čísla 0). Ukázkou takového typu vizualizace grafů jsou *obrázky 8.a-8.i*. Tyto funkce jsem vybral jen proto, abych demonstroval jak vizuálně zajímavé mohou být. Existuje samozřejmě více způsobů, jak vizualizovat komplexní funkce, ovšem v jádru jsou dost podobné této metodě, a proto je zde nebudeme blíže specifikovat. Pro účely této úvahy nám stačí vědět, že lze převést vícedimenzionální graf do dimenzí nižších. V tomto případě jsme převedli 4D graf do 2D prostoru – tedy dokonce o 2 dimenze níže! V momentě, kdy přiřazujeme číslům barvu a světlost nás může napadnout otázka: Kde je vlastně hranice mezi matematikou a vizuálním uměním, pokud vůbec nějaká jasně definovaná hranice existuje? Nad touto otázkou se zde záměrně nebudu zamýšlet proto, abych nechal prostor čtenáři.



obr. 8.a – f(z) = cos(sin(z))



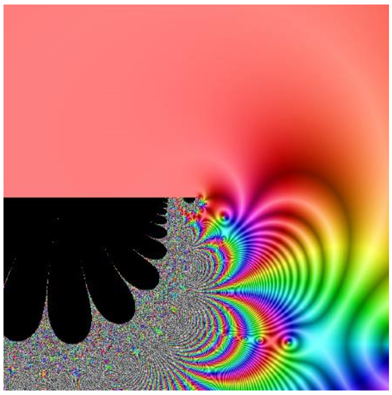
obr. 8.b – f(z) = cos(sin(z))



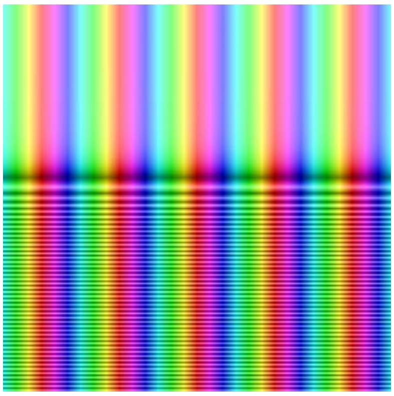
obr. 8.c – $\sqrt{z}$*+cos(z^2)*

obr. 8.d – f(z) = z^i^z^i

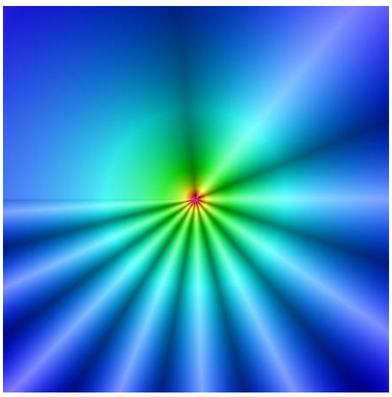
obr. 8.e – f(z) = z^13^tan(z^3^64i)



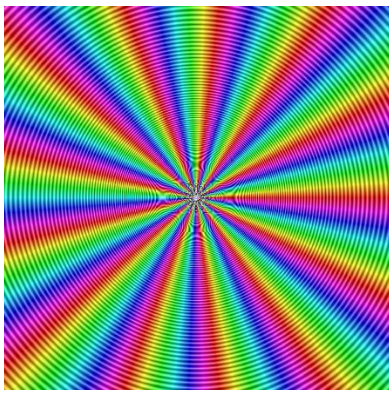
obr. 8.f – f(z) = cos(sin(z^i))



obr. 8.g – f(z) = i^z



obr. 8.h – f(z) = z^i



*obr. 8.i – f(z) = z^13*cos(13)*

My tedy nejspíš nikdy nebudeme schopni utvářet naše fantazie ve 4D prostoru, vidět barvu rentgenového záření nebo si snad **představit** hodnotu čísla $\sqrt{-1}$.Napadá mě ale jeden kandidát, který by s tímto úkolem neměl mít žádná problém – je to umělá inteligence (nejspíše tvořená neurálními sítěmi). Úvaha o takové schopnosti umělé inteligence je nesmírně fascinující a děsivá zároveň. Dokázala by nás intelektuálně překonat téměř ve všem. Její fantazie by nebyla omezena pouze třemi rozměry a neměla by ani žádné omezení komplexnosti fantaze.